

PROBLÈME 1

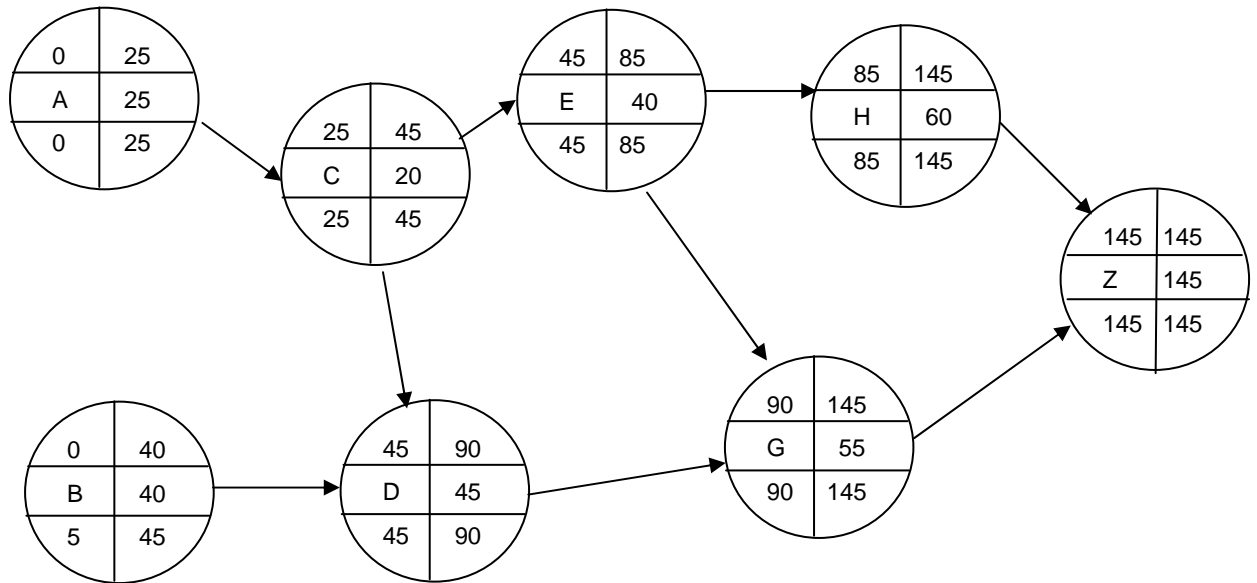
Une entreprise s'intéresse au procédé de fabrication d'un nouveau produit. Ce procédé fait intervenir un certain nombre d'activités. La liste des activités, leur durée estimée ainsi que leurs prédécesseurs immédiats sont présentés ci-dessous.

Activité	Prédécesseur(s) Immédiat(s)	Durée (en minutes)
A	-	25
B	-	40
C	A	20
D	B, C	45
E	C	40
G	D, E	55
H	E	60

- 1.1** Tracer un réseau donnant les relations entre les différentes activités. Donner les moments au plus tôt et au plus tard de chaque activité ainsi que le(s) chemin(s) critique(s). Quel est le temps minimum de réalisation de ce procédé de fabrication?
- 1.2** On se rend compte qu'il est possible d'accélérer certaines activités. Cependant, il faut alors encourir des frais pour chaque minute enlevée à la durée de l'activité. Le tableau suivant présente les activités pouvant être accélérées, le coût par minute d'accélération ainsi que le maximum de minutes pouvant être retranchées à la durée de l'activité :

Activité	Coût d'accélération (en \$/minute)	Accélération max (en minutes)
C	2,50	4
D	2	8
E	1	6
G	2,50	5
H	1,50	8

En admettant que l'on désire réduire le temps de fabrication du produit d'au moins 10 minutes, donner un modèle linéaire permettant de minimiser les frais d'accélération.

SOLUTION DU PROBLÈME 1**1.1**

Deux chemins critiques : A → C → E → H
 A → C → D → G

Temps minimum : 145 minutes

Note : le chemin A → C → E → G n'est pas critique même s'il est composé exclusivement d'activités critiques car sa longueur est inférieure à 145. Rappelons qu'un chemin critique est composé d'activités critiques et sa longueur est égale à la durée minimale du projet

D'après le fichier Excel 4600-Seance11-Pb1-Sol.xlsx(feuille 1.1), voici la solution :

Activité	Prédécesseurs imm.	Durée	EST	EFT	LST	LFT	Marge	Critique?
A		25	0	25	0	25	0	CRITIQUE
B		40	0	40	5	45	5	
C	A	20	25	45	25	45	0	CRITIQUE
D	B,C	45	45	90	45	90	0	CRITIQUE
E	C	40	45	85	45	85	0	CRITIQUE
G	D,E	55	90	145	90	145	0	CRITIQUE
H	E	60	85	145	85	145	0	CRITIQUE

Durée du projet **145**

1.2

Activité	Coût d'accélération (en \$/minute)	Accélération max (en minutes)
C	2,50	4
D	2	8
E	1	6
G	2,50	5
H	1,50	8

Définition des variables

T_i = moment de début de l'activité i

C_i = temps de compression de l'activité i

Fonction-objectif

Min $2,50 C_C + 2 C_D + C_E + 2,50 C_G + 1,5 C_H$

Contraintes :

Arc (A, C) : $T_C \geq T_A + 25$

Arc (B, D) : $T_D \geq T_B + 40$

Arc (C, D) : $T_D \geq T_C + 20 - C_C$

Arc (C, E) : $T_E \geq T_C + 20 - C_C$

Arc (D, G) : $T_G \geq T_D + 45 - C_D$

Arc (E, G) : $T_G \geq T_E + 40 - C_E$

Arc (E, H) : $T_H \geq T_E + 40 - C_E$

Arc (G, Z) : $T_Z \geq T_G + 55 - C_G$

Arc (H, Z) : $T_Z \geq T_H + 60 - C_H$

Accélération max

$C_C \leq 4$

$C_D \leq 8$

$C_E \leq 6$

$C_G \leq 5$

$C_H \leq 8$

Durée du projet: $T_Z \leq 135$ (diminution d'au moins 10 minutes)

Non-négativité : $T_i, C_i \geq 0$

D'après le fichier Excel *4600-Seance11-Pb1-Sol.xlsx* (feuille 1.2), le coût minimal pour réduire le temps de fabrication du produit d'au moins 10 minutes, donc le temps sera de 135 minutes, est de 28 \$.

Voici la solution d'Excel.

Tableau des activités

Activité	Durée normale	début	Compression (Accélération)	Max	Coûts(\$/min)
A	25	0,0	0,0	0	0
B	40	1,0	0,0	0	0
C	20	25,0	4,0	4	2,5
D	45	41,0	6,0	8	2
E	40	41,0	6,0	6	1
G	55	80,0	0,0	5	2,5
H	60	75,0	0,0	8	1,5
Z	0	135,0	0,0	0	0

Durée du projet **135** minutes

Coût d'accélération **28,00 \$**

Ainsi, les activités C, D et E seront accélérées de 4, 6 et 6 minutes respectivement.

PROBLÈME 2

Une rivière doit être aménagée pour le contrôle du débit et la production d'électricité. Le site a déjà été choisi pour la construction d'un barrage et d'une centrale. Le gestionnaire de projet demande aux chefs d'équipe et sous contractants de soumettre une liste détaillée des activités à réaliser, ressources nécessaires, et des estimations de temps et de coûts. Le projet doit être complété avant l'échéance de 44 semaines; la pénalité est de 20 000 \$ par semaine de retard. La réalisation du projet engendre des coûts de gestion de 10 000 \$ par semaine.

Activités	Symbole	Prédécesseurs	Durée
		immédiats	
Embauche	A	-	3
Transport de l'équipement de construction	B	A	4
Commande de l'équipement électrique	C	A	20
Transport des matériaux de construction	D	A	16
Excavation	E	B	20
Construction	F	B	28
Transport de l'équipement électrique	G	C	3
Détournement de la rivière	H	E	7
Installation des génératrices	I	D,F,G,H	9
Opération et tests	J	I	4

- 2.1 Tracer un réseau donnant les relations entre les différentes activités.
- 2.2 Donner, pour chaque activité, les moments au plus tôt et au plus tard ainsi que la marge.
- 2.3 Identifier le(s) chemin(s) critique(s). Quel est le temps minimum pour la mise en place du système électrique?

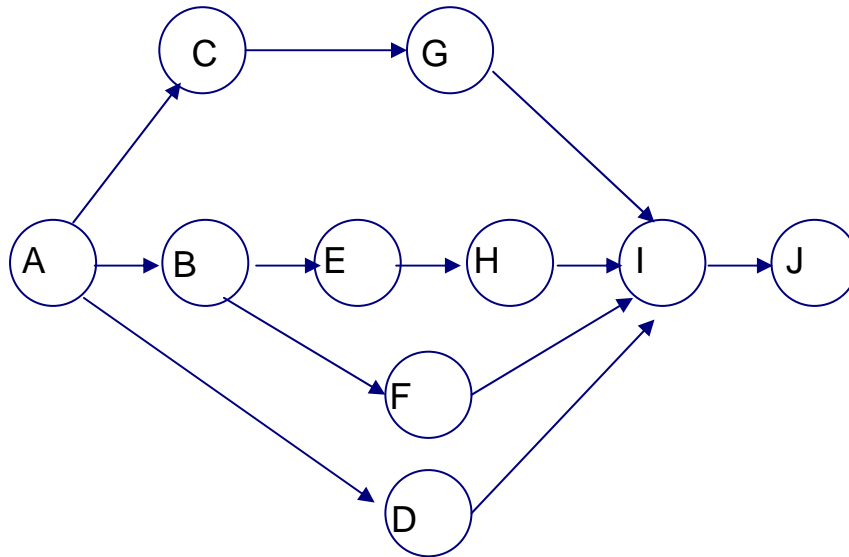
Certaines activités pourraient être accélérées afin de réduire les coûts de gestion (10 000 \$ par semaine) et les pénalités (20 000 \$ par semaine) du projet

Activités	Max	Cout
		(\$/semaine)
C	2	1000
E	3	5000
F	12	8000
I	2	6000

- 2.4 Formuler un modèle linéaire permettant de déterminer le nombre de jours à retrancher à la durée de chaque activité pour réduire le temps total de mise en place de manière à minimiser les pénalités.
- 2.5 Quelles modifications apportez-vous au modèle trouvé en 2.4 pour minimiser les coûts d'accélération de façon à ce que la durée du projet ne dépasse pas 44 semaines.

L'entrepreneur se rend compte qu'il a oublié de tenir compte du fait que pour l'activité I, en plus du coût variable déjà considéré, un coût fixe de 10000 \$ doit être assumé peu importe le nombre de semaines retranchées.

- 2.6** Donner les modifications à apporter au modèle présenté en 2.5 pour tenir compte de cette nouvelle information.

SOLUTION PROBLÈME 2 :**2.1****2.2 et 2.3**

D'après le fichier Excel *4600-Seance11-Pb2-Sol.xlsx* (feuille 2.1-2.2-2.3), la durée du projet est de 48 semaines. Le chemin critique est : A-B-F-I-J.

Voici la solution d'Excel :

Activité	Prédécesseurs imm.	Durée	EST	EFT	LST	LFT	Marge	Critique?
A		3	0	3	0	3	0	CRITIQUE
B	A	4	3	7	3	7	0	CRITIQUE
C	A	20	3	23	12	32	9	
D	A	16	3	19	19	35	16	
E	B	20	7	27	8	28	1	
F	B	28	7	35	7	35	0	CRITIQUE
G	C	3	23	26	32	35	9	
H	E	7	27	34	28	35	1	
I	D,F,G,H	9	35	44	35	44	0	CRITIQUE
J	I	4	44	48	44	48	0	CRITIQUE

Durée du projet **48**

2.4 Le modèle linéaire sera :**Définition des variables :**

T_i = le moment où l'activité i débute ($i=A, B, \dots, J, \text{FIN}$)

C_i = le temps de compression de l'activité i ($i=C, E, F, I$)

Fonction-objectif :

$$\text{Min } T_{\text{FIN}}$$

Contraintes :

Contrainte pour chaque arc (relation de précédence)

$$\text{Arc}(A,B) : T_B \geq T_A + 3$$

$$\text{Arc}(A,C) : T_C \geq T_A + 3$$

...

$$\text{Arc}(D,I) : T_I \geq T_D + 16$$

$$\text{Arc}(F,I) : T_I \geq T_F + 28 - C_F$$

$$\text{Arc}(G,I) : T_I \geq T_G + 3$$

$$\text{Arc}(H,I) : T_I \geq T_H + 7$$

$$\text{Arc}(I,J) : T_J \geq T_I + 9 - C_I$$

$$\text{Arc}(J, Z) : T_{\text{FIN}} \geq T_J + 4$$

Compression maximale

$$C_C \leq 2$$

$$C_E \leq 3$$

$$C_F \leq 12$$

$$C_I \leq 2$$

Non-négativité

$$T_i, C_i \geq 0$$

D'après le fichier Excel *4600-Seance11-Pb2-Sol.xlsx* (feuille 2.4), la durée minimale du projet est de 42 jours, en accélérant les activités E, F et I de 3, 4, et 2 respectivement.

Le coût du projet sera de 479 000 \$ et le coût d'accélération de 59 000 \$.

2.5 Modifications au modèle précédent :

Fonction-objectif :

$$\text{Min } C_C + 5 C_E + 8 C_F + 6 C_I$$

Contraintes : ajouter la contrainte suivante

$$T_{\text{FIN}} \leq 44$$

D'après le fichier Excel *4600-Seance11-Pb2-Sol.xlsx* (feuille 2.5), le coût d'accélération sera de 33 000 \$ avec une durée de 44 semaines. Le coût total du projet sera de 473 000 \$.

2.6 Ajouter

1- La variable $Y_I = \begin{cases} 1 & \text{si l'activité « I » est compressée} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

2- Fct-obj : $\text{Min}(C_C + 5 C_E + 8 C_F + 6C_I + 10Y_I)$

3- Contraintes liantes : $C_I \leq 2Y_I$

D'après le fichier Excel *4600-Seance11-Pb2-sol.xlsx* (feuille 2.6), le coût de compression pour une durée du projet de 44 jours, en prenant en compte la condition de 2.6, est de 47 000 \$ et le coût total du projet est de 487 000 \$.

PROBLÈME 3

HEC Montréal désire planifier le déménagement d'un de ses services dont les bureaux sont actuellement situés à l'édifice Côte-Sainte-Catherine (CSC) vers des bureaux situés à l'édifice Decelles. Afin de minimiser les impacts de ce déménagement sur le travail des employés du service, l'école aimerait que ce déménagement se fasse durant l'été et qu'il se fasse le plus rapidement possible. Le déménagement sera assuré par la compagnie *Le clan Paquetons* qui assure depuis plusieurs années les déménagements de l'école. La compagnie a dressé la liste des activités à accomplir pour mener à bien ce déménagement. Le tableau suivant présente, pour chaque activité, sa durée estimée ainsi que la liste des prédécesseurs immédiats.

Activité	Description	Préd. imm.	Durée (en jours)
A	Vider les bureaux situés à Decelles	-	2
B	Emballer les documents, ordinateurs, téléphones, etc. des bureaux de CSC.	-	3
C	Mettre en place le câblage des réseaux informatique, téléphonique et électrique des bureaux de Decelles.	A	2
D	Nettoyer et peindre les bureaux de Decelles.	C	5
E	Déménager le mobilier de CSC vers Decelles.	B, D	2
F	Déménager les ordinateurs et téléphones de CSC vers Decelles.	E	1
G	Déménager les boîtes de documents de CSC vers Decelles.	E	2
H	Configurer les systèmes informatique et téléphonique des bureaux de Decelles.	F	3
I	Défaire les boîtes et installer les bureaux de Decelles.	G	4

3.1 Construire un réseau donnant les relations entre les différentes activités.

3.2 Déterminer pour chaque activité, ses moments au plus tôt, ses moments au plus tard ainsi que sa marge. Indiquer le chemin critique et la durée du projet.

- 3.3** On aimerait que la durée du déménagement ne dépasse pas 15 jours afin de pouvoir le réaliser en moins de trois semaines (15 jours ouvrables). La compagnie *Le clan Paquetons* nous indique qu'il est possible d'accélérer certaines activités moyennant un coût supplémentaire. Voici le tableau qui montre, pour chaque activité, le maximum de compression et les coûts de compression.

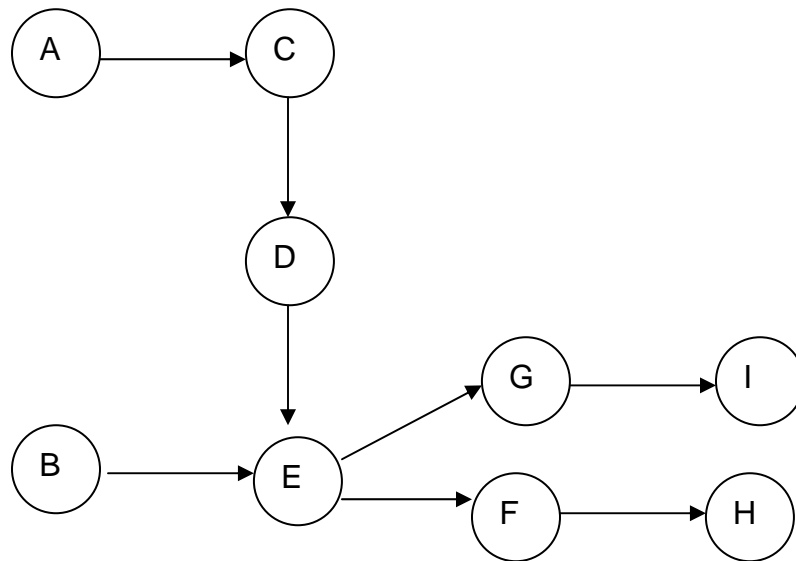
Activité	Compression maximale	Coût par jour de compression
A	1	250 \$
B	1.5	300 \$
C	1	800 \$
D	2	240 \$
E	1	300 \$
F	0	-
G	1	300 \$
H	1	600 \$
I	2	340 \$

Proposer un modèle linéaire qui permet de minimiser les coûts de compression tout en s'assurant que la durée du projet ne dépasse pas 15 jours. Résoudre le problème à l'aide du solveur d'Excel et présenter brièvement la solution optimale.

- 3.4** Supposons que, pour les activités D et I, il existe un coût fixe de 200 \$ à assumer (en plus du coût de compression considéré en 3.3) si l'une ou l'autre de ces deux activités (ou les deux) sont accélérées. Proposer des modifications au modèle proposé en 3.3 pour tenir compte de cette nouvelle information. Les modifications proposées devront faire en sorte que le nouveau modèle soit encore un modèle linéaire. Résoudre le problème à l'aide du solveur d'Excel et présenter brièvement la solution optimale.

SOLUTION PROBLÈME 3

3.1 Le réseau donnant les relations entre les différentes activités:

**3.2**

D'après le fichier Excel *4600-Seance11-Pb3-Sol.xlsx*, voici la solution :

Activité	Prédécesseurs imm.	Durée	EST	EFT	LST	LFT	Marge	Critique?
A		2	0	2	0	2	0	CRITIQUE
B		3	0	3	6	9	6	
C	A	2	2	4	2	4	0	CRITIQUE
D	C	5	4	9	4	9	0	CRITIQUE
E	B, D	2	9	11	9	11	0	CRITIQUE
F	B, E	1	11	12	13	14	2	
G	B, E	2	11	13	11	13	0	CRITIQUE
H	F	3	12	15	14	17	2	
I	G	4	13	17	13	17	0	CRITIQUE

Durée du projet

17

Chemin critique est : A → C → D → E → G → I

3.4

Définition des variables

T_j = moment du début de l'activité j

C_j = compression de l'activité j

$J = A, \dots, I$

Fonction-objectif

$$\text{Min } 250c_A + 300c_B + 800c_C + \dots + 340c_I$$

Contraintes

Pour chaque lien :

$$(A, C) : T_C \geq T_A + 2 - C_A$$

$$(B, E) : T_E \geq T_B + 3 - C_B$$

$$(C, D) : T_D \geq T_C + 2 - C_C$$

⋮

$$(G, I) : T_I \geq T_G + 2 - C_G$$

$$T_{FIN} \geq T_I + 4 - C_I$$

$$T_{FIN} \geq T_H + 3 - C_H$$

Durée projet

$$T_{FIN} \leq 15$$

Compression-max

$$C_A \leq 1$$

$$C_B \leq 1.5$$

⋮

$$C_I \leq 2$$

Non-négativité

$$T_j \geq 0 \quad C_j \geq 0$$

Solution optimale

D'après le fichier *4600-Seance11-Pb3-Sol.xlsx*, la solution optimale est d'accélérer l'activité D (Nettoyer et peindre les bureaux de Decelles.) de 2 jours, le coût de cette solution est de 480\$ et la durée totale du projet est de 15 jours.

3.4

Ajout d'une variable

$$W = \begin{cases} 1 & \text{si D ou I est accélérée} \\ 0 & \text{Sinon} \end{cases}$$

Fonction-objectif

$$\text{Min } 250c_A + 300c_B + 800c_C + \dots + 340c_I + 200W$$

Contraintes

$$c_D \leq 2W$$

$$c_I \leq 2W$$

W: binaire

Solution optimale

D'après le fichier *4600-Seance11-Pb3-Sol.xlsx*, la solution optimale est d'accélérer l'activité A (Vider les bureaux situés à Decelles) d'une journée et d'accélérer l'activité E (Déménager le mobilier de CSC vers Decelles) d'une journée aussi pour un coût minimal de compression de 550\$. La durée totale du projet est alors de 15 jours.

Problème 4

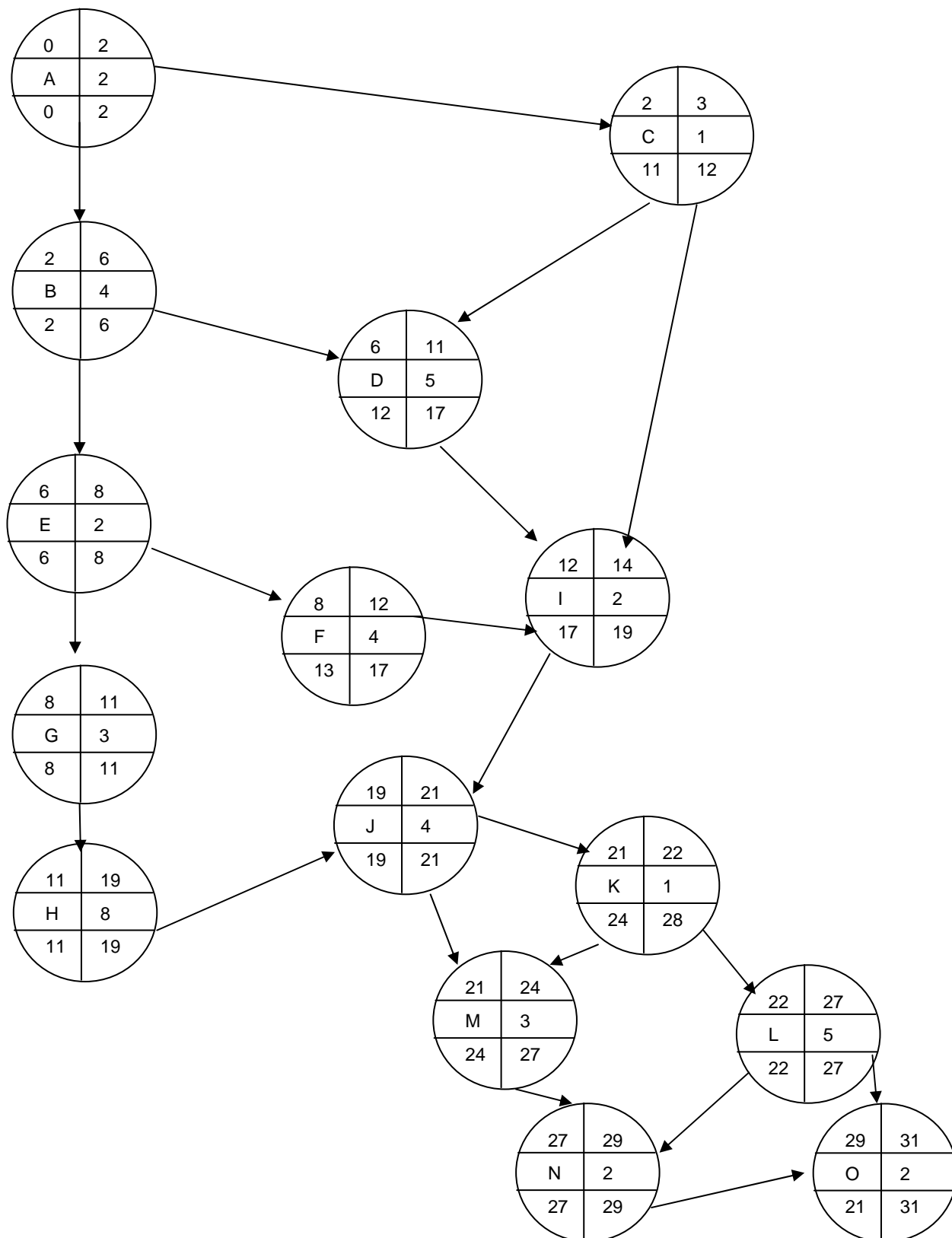
Le groupe musical V8 arrive en ville pour donner une série de deux spectacles cet été, les 16 et 17 juillet 2010. N'ayant pas de stade assez grand disponible pour produire un tel spectacle à ces dates là, il a été décidé de louer un vaste espace et d'y construire une salle de spectacle extérieure temporaire qui sera démantelée dès la fin du dernier spectacle. Les coûts de location pour cet espace sont de 35 000\$ par jour. On cherche donc le nombre minimal de jours où il faudra louer ce site pour installer la salle, donner les spectacles et finalement démanteler cette salle et tout remettre en ordre. La construction de cette salle extérieure doit se faire selon un ordre qui devra respecter certaines contraintes. Le tableau suivant présente la liste des tâches à faire, leur durée en jours et les contraintes de précédence :

Tâche	Description	Durée (jours)	Prédécesseur(s)
A	Livrer et décharger la scène	2	-
B	Installer la scène	4	A
C	Livrer les accessoires d'éclairage	1	A
D	Installer l'éclairage	5	B, C
E	Livrer et décharger le matériel technique	2	B
F	Installer le matériel technique	4	E
G	Livrer les gradins	3	E
H	Installer les gradins	8	G
I	Répétitions	2	C, D, F
J	Spectacles	2	H, I
K	Défaire et charger les gradins à l'entrée	1	J
L	Défaire et charger les autres gradins	5	K
M	Défaire le matériel technique/éclairage	3	J, K
N	Charger le matériel technique/éclairage	2	L, M
O	Défaire et charger la scène	2	L, N

- 4.1 Représenter cette situation à l'aide d'un réseau.
- 4.2 Sachant que le dernier spectacle aura lieu dans la soirée du 17 juillet 2010, à quelle date, au plus tôt, aura-t-on libéré le site?
- 4.3 Le chanteur du groupe n'aime pas entendre de bruit lors des répétitions. Comment serait modifié votre réseau de la question 1 s'il vous avisait que vous ne pourrez pas installer les gradins pendant les répétitions?

- 4.4** Certaines activités d'installation (i.e. les activités B, D, F et H) peuvent être accélérées en utilisant du personnel et du temps supplémentaire. Ainsi, on pourra gagner 1 journée pour l'installation de la scène (activité B) si on ajoute du personnel pour un coût de 12 000\$. On pourra épargner jusqu'à 2 jours sur la durée de l'activité D au coût de 22 000\$ par jour. On peut aussi réduire la durée de la tâche F d'une journée en ajoutant 25 000\$. L'installation des gradins (activité H) peut être accélérée d'au plus 3 jours au coût de 12 000\$ par jour.

Proposer un modèle linéaire qui permettrait de voir de combien de jours il serait intéressant de réduire la durée de l'installation pour cette salle de spectacle. (On ne tiendra pas compte de la question 4.3 pour répondre à la question 4.4)

SOLUTION PROBLÈME 4**4.1**

D'après de le schéma du réseau des activités, la durée totale du projet est de 31 jours, le chemin critique est : A----> B----> E----> G----> H----> J----> K----> L----> N----> O

4.2 Les tâches critiques qui suivent le spectacle (l'activité J) sont K, L, N, O et la somme des durées de réalisation de ces activités est de 10 jours (1 + 5 + 2 + 2). Ainsi, puisque la date du dernier spectacle est le 17 juillet, donc le 27 juillet au soir, le site devrait être **libéré**.

4.3 Il suffit d'ajouter une contrainte de précédence supplémentaire demandant que la tâche H soit terminée avant que la tâche I ne commence.

4.4

Les variables :

T_i = journée au plus tôt où la tâche i peut débuter ($i = A, B, \dots, J$) (Note : Puisque les spectacles doivent avoir lieu à date fixe, il n'est pas nécessaire de considérer les tâches K à O).

X_i = nombre de jours gagnés sur la tâche i ($i = B, D, F, H$)

La fonction-objectif :

Minimiser $35000 T_J + 12000 X_B + 22000 X_D + 25000 X_F + 12000 X_H$

Contraintes:

$$T_B \geq T_A + 2$$

$$T_C \geq T_A + 2$$

$$T_D \geq T_B + 4 - X_B$$

$$T_D \geq T_C + 1$$

$$T_E \geq T_B + 4$$

$$T_F \geq T_E + 2$$

$$T_G \geq T_E + 2$$

$$T_H \geq T_G + 3$$

$$T_I \geq T_D + 5 - X_D$$

$$T_I \geq T_C + 1$$

$$T_I \geq T_F + 4 - X_F$$

$$T_J \geq T_H + 8 - X_H$$

$$T_J \geq T_I + 2$$

Compression-max

$$X_B \leq 1$$

$$X_D \leq 2$$

$$X_F \leq 1$$

$$X_H \leq 3$$

$$T_i, X_i \geq 0$$