Modèles d'aide à la décision
4-600-04

Séance 9
Modèles linéaires en nombres entiers

Plan

- 9.1 Introduction
- 9.2 Aperçu des méthodes de résolution
- 9.3 Nombres entiers dans le Solveur d'Excel
- 9.4 Sélection de projets
- 9.5 Conditions logiques
- 9.6 Coût fixe et seuil minimal

9.1 Introduction

- Lorsque certaines variables dans un programme linéaire (PL) doivent prendre une valeur entière, nous sommes en présence d'un programme linéaire en nombres entiers (PLNE).
- Différent types de PLNE :
  - **Programme linéaire totalement en nombres entiers :** toutes les variables doivent prendre des valeurs entières (0,1,2,….)
  - **Programme linéaire en variables binaires :** toutes les variables sont binaires (0 ou 1)
  - **Programme linéaire mixte :** mélange de variables entières et de variables continues.

9.1 Introduction

- Quelques applications :
  - Problèmes de décision sous forme de choix (variables binaires).
  - Nombre d'installations ou d'équipements (coûts et capacités importantes).
  - Activités avec coût fixe indépendant du niveau.
  - Activités ne pouvant être entreprises qu'à un niveau minimal.
  - Ordonnancement, horaires, routes, etc. (optimisation combinatoire).
  - Etc…

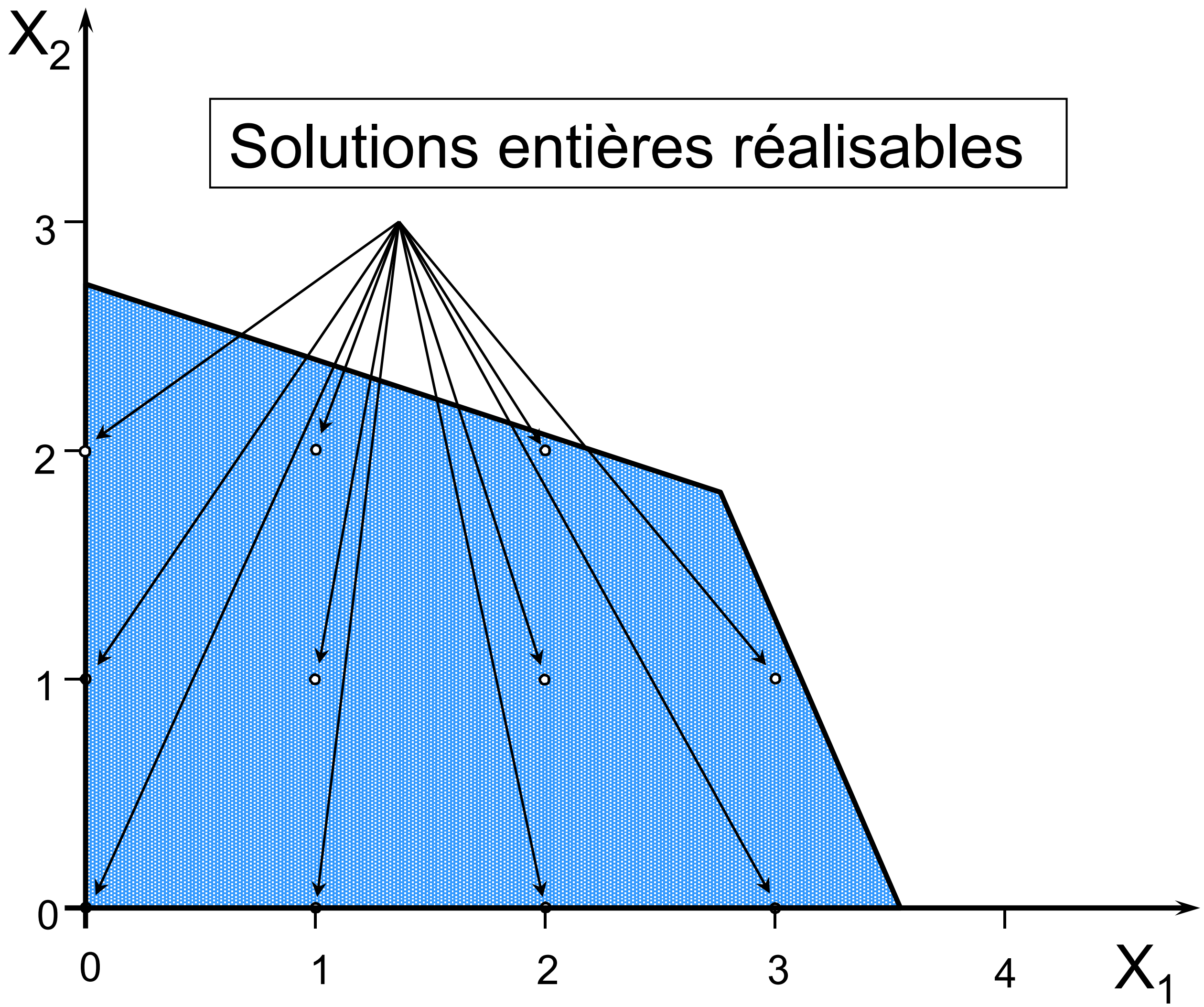
9.1 Introduction

$$\max \quad 2X1 + 3X2$$

$$\begin{aligned} \text{S.C.} \quad & 4X1 + 12X2 <= 33 \\ & 10X1 + 4X2 <= 35 \\ & X1, X2 >= 0 \\ & X1, X2 \text{ entières} \end{aligned}$$

- Les contraintes d'intégrité sont très faciles à énoncer mais rendent parfois la résolution du problème beaucoup plus difficile (et parfois même impossible).

9.1 Introduction



9.1 Introduction

- Lorsqu’on résout un programme linéaire (sans contraintes d’intégrité), nous sommes parfois “chanceux” et nous obtenons une solution optimale entière.
- Que faire lorsqu’on obtient une solution fractionnaire et qu’une solution entière est nécessaire?
  - Dans certains cas, l'approximation obtenue en arrondissant la solution d'un programme linéaire est acceptable mais il existe cependant plusieurs cas où une solution arrondie est sous-optimale ou inutilisable.
  - Il faut alors ajouter explicitement les contraintes d’intégrité dans le modèle. Le logiciel d’optimisation utilisera alors une autre méthode de résolution (énumération implicite).

9.2 Aperçu des méthodes de solution

- Méthode du simplexe :
  - Cette méthode peut résoudre un PL sans contraintes d'intégrité.
  - Cette méthode exploite le fait que la solution optimale va se retrouver en un coin du domaine (point extrême).
  - La méthode du simplexe parcourt systématiquement les points extrêmes du domaine jusqu'à atteindre le point extrême optimal.

9.2 Aperçu des méthodes de solution

- **Énumération implicite (Branch-and-Bound):**
  - Méthode pour résoudre des PLNE.
  - Méthode utilisée par le Solveur d'Excel.
  - Énumère toutes les possibilités (implicitement).
  - Exige donc la résolution d'une série de programmes linéaires (sans contraintes d'intégrité).
  - On utilise un arbre pour parcourir le domaine et on élimine les branches qui ne peuvent pas contenir l'optimum grâce à des règles simples.
  - En théorie, cette méthode peut résoudre tout PLNE.
  - En pratique, elle peut prendre beaucoup de temps.
  - Illustration : 4600-9.2-Horaires-6sur7.xls

9.3 Nombres entiers dans le Solveur d'Excel

- Construire le modèle comme pour tout PL.
- Dans les paramètres du Solveur :
  - Ajouter des contraintes sur les cellules variables :
    - **ent** pour variables entières (**int** en anglais)
    - **bin** pour variables binaires
  - Dans les options du Solveur :
    - **Tolérance** (2003 ou 2007) et **Optimalité des nombres entiers** (2010)

    Valeur permettant d'arrêter la résolution lorsqu'une solution entière réalisable est trouvée et qui se retrouve assurément à moins d'un certain % de la solution optimale. En diminuant la tolérance, on peut éventuellement augmenter la qualité de solution mais le temps peut alors augmenter. Mettre à 0% pour les exemples du cours.

HEC MONTRÉAL

9.4 Sélection de projets

- Une société dispose de 150 000$ pour fins d'investissement. Elle considère six projets possibles, dont les caractéristiques apparaissent au tableau suivant :

	P1	P2	P3	P4	P5	P6
VAN espérée (en milliers de $)	180	44	150	140	200	175
Capital (en milliers de $)	55	16	24	49	61	55
Ress. Hum.	6	3	2	5	3	4

- La société peut consacrer un maximum de 10 personnes à la gestion de ces projets.

9.4 Le modèle mathématique

- **Variables de décision :**

  X_i = 1 si le projet i est choisi; 0 sinon. (i=1,2,…,6)

- **Fonction-objectif :**

  Max VAN espérée

  Max $180X_1 + 44X_2 + \ldots + 175X_6$

- **Contraintes :**

  Budget : $55X_1 + 16X_2 + \ldots + 55X_6 \leq 150$

  R.-H. : $6X_1 + 3X_2 + \ldots + 4X_6 \leq 10$

  Binarité : $X_1, X_2, \ldots, X_6$ binaire

9.5 Conditions logiques

- Dans le problème de sélection de projets, modéliser les situations suivantes (conditions logiques) :
  1. La société veut entreprendre un maximum de 3 projets.
  2. Les projets 1 et 5 sont incompatibles.
  3. Le projet 3 ne peut être entrepris que si le projet 1 l'est aussi.
  4. Si le projet 6 est entrepris, alors le projet 2 ou le projet 4 doit l'être aussi.
  5. Si le projet 6 est entrepris, alors le projet 2 et le projet 4 doivent l'être aussi.
- Comment modifier le modèle linéaire précédent pour modéliser ces conditions logiques?
  – L'utilisation de variables binaires permet de traduire des énoncés logiques en contraintes linéaires.

9.5 Conditions Logiques

- Un truc infaillible pour modéliser les conditions logiques à l'aide de contraintes linéaires :
  - Construire le tableau correspondant aux 2^n combinaisons possibles des valeurs 0 et 1 pour les variables considérées dans l'énoncé de la condition (où *n* = nombre de variables binaires considérées dans la condition).
  - Pour chaque combinaison, identifier si elle est réalisable.
  - Pour chaque combinaison non-réalisable, ajouter une contrainte linéaire ayant la forme suivante :

$$\sum_{i \in V} x_i + \sum_{i \in F} (1 - x_i) \leq n - 1$$

Où $V = \{i | x_i = 1\}$ et $F = \{i | x_i = 0\}$

9.5 Le modèle mathématique

- **<u>Ajout des contraintes suivantes au modèle de la page 12 :</u>**

Cond. 1 : $X_1 + X_2 + \ldots + X_6 \leq 3$

Cond. 2 : $X_1 + X_5 \leq 1$

Cond. 3 : $-X_1 + X_3 \leq 0$

Cond. 4 : $-X_2 - X_4 + X_6 \leq 0$

Cond. 5.1 : $X_2 - X_4 + X_6 \leq 1$

Cond. 5.2 : $-X_2 + X_4 + X_6 \leq 1$

Cond. 5.3 : $-X_2 - X_4 + X_6 \leq 0$

HEC MONTRÉAL

9.6 Coût fixe et seuil minimal

- Une compagnie qui fabrique des électroménagers désire planifier la distribution des appareils entre ses trois usines et ses quatre centres de distribution.
- Le fichier 4600-9.6-Transport-Data.xlsx donne le coût unitaire de transport entre chaque usine et chaque centre de distribution, la capacité mensuelle des usines ainsi que la demande minimale mensuelle des centres de distribution.

9.6 Coût fixe et seuil minimal

- Questions :
  a. Trouver le plan de distribution optimal en ne considérant que le coût variable unitaire de transport.
  b. Trouver le plan de distribution optimal en considérant que le coût de transport entre une usine et un centre de distribution comprend un coût fixe de 1000$ en plus du coût variable.
  c. Trouver le plan de distribution optimal en considérant en plus des coûts fixe et variable le fait que le transporteur n'accepte pas de livrer moins de 450 appareils par mois sur une route donnée lorsque des unités sont livrées sur cette route.

9.6 Coût fixe et seuil minimal

- Questions :

d. Quel serait l'effet sur le plan de distribution optimal s'il n'y avait pas de coût fixe mais que le seuil minimal de 450 appareils (question d) était pris en considération conjointement avec le coût variable?

9.6 Le modèle mathématique (question a)

- **Variables de décision :**
  X_{ij} = Nombre d'unités transportées de l'usine Ui vers le centre de distribution Dj; (i=1,2,3; j=1,2,3,4).

- **Fonction-objectif :**
  Min Coût total de transport
  Min $12{,}6\, X_{11} + 14{,}35X_{12} + \ldots + 16{,}43X_{34}$

- **Contraintes :**
  1) *Capacité des usines :*
  U1 : $X_{11} + X_{12} + X_{13} + X_{14} \leq 1215$
  U2 : $X_{21} + X_{22} + X_{23} + X_{24} \leq 852$
  U3 : $X_{31} + X_{32} + X_{33} + X_{34} \leq 1354$

9.6 Le modèle mathématique (question a)

- **Contraintes (suite) :**

2) *Demande des centres de dist*. :

D1 : $X_{11} + X_{21} + X_{31} \geq 857$

D2 : $X_{12} + X_{22} + X_{32} \geq 626$

D3 : $X_{13} + X_{23} + X_{33} \geq 1234$

D4 : $X_{14} + X_{24} + X_{34} \geq 565$

3) *Non-négativité :* $X_{ij} \geq 0$ (i=1,2,3; j=1,2,3,4).

9.6 Le modèle mathématique (question b)

- **Ajout des variables suivantes au modèle de la question a :**
  Y_{ij} = 1 si la route (Ui,Dj) est utilisée, 0 sinon; (i=1,2,3; j=1,2,3,4).

- **Fonction-objectif :**
  Min $12{,}6\, X_{11} + 14{,}35 X_{12} + \ldots + 16{,}43 X_{34} + 1000(Y_{11} + Y_{12} + \ldots + Y_{34})$

- **Ajout des contraintes suivantes au modèle de la question a :**
  4) Contraintes liantes :
  Route (U1,D1) : $X_{11} - 1215\, Y_{11} \leq 0$
  …
  Route (U3,D4) : $X_{34} - 1354\, Y_{34} \leq 0$

  5) Binarité : Y_{ij} binaire

9.6 Le modèle mathématique (question c)

- **Ajout des contraintes suivantes au modèle de la question b :**

  6) Seuil minimal :

  Route (U1,D1) : $X_{11} – 450\ Y_{11} \geq 0$

  …

  Route (U3,D4) : $X_{34} – 450\ Y_{34} \geq 0$

9.6 Le modèle mathématique (question d)

- **<u>Ajout des variables suivantes au modèle de la question a :</u>**
  Y_{ij} = 1 si la route (Ui,Dj) est utilisée, 0 sinon; (i=1,2,3; j=1,2,3,4).

- **<u>Fonction-objectif</u> : idem à celle du modèle de la question a**

HEC MONTRÉAL

9.6 Le modèle mathématique (question d)

- **Ajout des contraintes suivantes au modèle de la question a :**

4) Contraintes liantes :

Route (U1,D1) : $X_{11} - 1215\ Y_{11} \leq 0$

…

Route (U3,D4) : $X_{34} - 1354\ Y_{34} \leq 0$

6) Seuil minimal :

Route (U1,D1) : $X_{11} - 450\ Y_{11} \geq 0$

…

Route (U3,D4) : $X_{34} - 450\ Y_{34} \geq 0$

5) Binarité : Y_{ij} **binaire**